Problema sobre modelos no lineales 1.

Obtener la aproximación lineal mediante el desarrollo en serie de Taylor del modelo

$$y_t = x^{\beta}{}_t + \beta + u_t \, .$$

Para los datos:

y_t	x_t
4	1
5	2
11	3
26	5

obtener $\hat{\beta}_1$ partiendo de $\hat{\beta}_0 = 1$

Solución

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de primer orden se obtiene:

$$y_t \cong f(x_t, \hat{\beta}_0) + \left(\frac{\partial f(x_t, \hat{\beta}_0)}{\partial \hat{\beta}_0} \right) (\beta - \hat{\beta}_0) + u_t$$

que podemos ver como

$$y^*{}_t \cong z(\hat{\beta}_0)\beta + u_t$$

donde

$$z(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{\partial f(x_t, \hat{\beta}_0)}{\partial \hat{\beta}_0} \right) \text{ e } y^*{}_t \cong y_t - f(x_t, \hat{\beta}_0) + z(\hat{\beta}_0)\hat{\beta}_0$$

En este modelo

$$f(x_t, \beta) y_t = x^{\beta}{}_t + \beta$$

y por tanto

$$z(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{\partial f(x_t, \hat{\beta}_0)}{\partial \hat{\beta}_0} \right) = 1 + x_t^{\hat{\beta}_0} \ln x_t$$

de forma similar tendremos que

$$y^*{}_t = y_t + x_t^{\hat{\beta}_0} (\hat{\beta}_0 \ln x_t - 1)$$

De donde para $\hat{\beta}_0 = 1$

$$z(1) = 1 + x_t \ln x_t$$
$$y^*{}_t = y_t + x_t (\ln x_t - 1)$$

obteniendo a partir de los datos iniciales la siguiente tabla

y_t	x_t	y^*_t	$z(\hat{\beta}_0)$
4	1	3	1
5	2	4,39	2,39
11	3	11,3	4,30
26	5	29,05	9,05

El valor estimado solicitado viene expresado en

$$y^*_t = \hat{\beta}_1 z(\hat{\beta}_0)$$

y por tanto

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum z(\hat{\beta}_0)\mathrm{y}^*}{\sum z(\hat{\beta}_0)^2} = \frac{324,98}{107,1} = 3,03$$